Quelques éléments de topologie

Moulay Emmanuel

Table des matières

1 Divers théorèmes **5**
- 1.1 Notations . . . 5
- 1.2 Théorème de Sard-Brown . . . 5
- 1.3 Théorème d'Hurewicz . . . 8
- 1.4 Le lemme des 5 . . . 10
- 1.5 Commutativité de π_n . . . 12
- 1.6 Théorème de Jordan pour les courbes . . . 13
- 1.7 Lemme de Nakayama . . . 14
- 1.8 Variétés de dimension 1 . . . 15
- 1.9 Le lemme de Morse . . . 18
- 1.10 Familles de courbes réelles . . . 18

2 Exercices **21**
- 2.1 Homologie . . . 21
- 2.2 Singularités . . . 28

Chapitre 1

Divers théorèmes

1.1 Notations

On note

$$\begin{aligned}
S^n &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x|| = 1\right\},\\
D^n &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n}; ||x|| \leq 1\right\},\\
D^n_+ &= \left\{(x_0, ..., x_n) \in S^n : x_n \geq 0\right\},\\
D^n_- &= \left\{(x_0, ..., x_n) \in S^n : x_n \leq 0\right\}.
\end{aligned}$$

$\simeq$ signifie isomorphe, $\sim$ signifie homologue et $\approx$ signifie homotope.

1.2 Théorème de Sard-Brown

Définition 1 *Soit K un ensemble inclus dans $\mathbb{R}^n$, K est dit de mesure nulle si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\{Q_i\}_{i\in I}$ famille de cubes ouverts telle que*

1. $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} Q_i$,
2. $\sum\limits_{i\in I} vol(Q_i) < \epsilon$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

On dit qu'une fonction est lisse si elle est de classe C^∞.

Proposition 2 *Si chaque point $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ possède un voisinage N qui vérifie $K \cap N$ de mesure nulle, alors K est de mesure nulle.*

Proposition 3 *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un espace compact dont l'intersection avec chaque hyperplan $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ est de mesure nulle dans l'hyperplan, alors K est de mesure nulle dans R^n.*

On peut maintenant énoncer le théorème de Sard-Brown donné par exemple dans [1].

Théorème 4 (Théorème de Sard-Brown) *Soit M^n une variété lisse, $f : M^n \to \mathbb{R}^k$ une application lisse et $C = crit(f) \subset M^n$ l'ensemble des points critiques de f, alors $f(C)$, qui est l'ensemble des valeurs critiques de f, est de mesure nulle.*

Preuve. On pose $f = (f_1, ..., f_k)$. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur n.

Le cas $n = 0$ est vrai.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $n - 1$. Soit

$$D = \{x \in M^n; D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| = 1\} \subset C$$

l'ensemble des points où la dérivée de f s'annule. Nous allons scinder la preuve en deux parties :

1ère partie : Montrons que $f(D)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^k$. Si la dérivée de f s'annule en x, il en est de même de la dérivée de f_1. Si E est l'ensemble des points critiques de f_1, alors

$$f(D) \subset f_1(E) \times \mathbb{R}^{k-1}.$$

Comme $\mathbb{R}^{k-1}$ peut être recouvert par un ensemble dénombrable de cubes de volume inférieur à 1, $f_1(E) \times \mathbb{R}^{k-1}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^k$ si $f_1(E)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$. Ainsi, il suffit de prouver le résultat pour $k = 1$, i.e. pour $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit

$$D_i = \{x \in U : D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| \leq i\}$$

alors on a

$$D = D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n$$

et tous les D_i sont fermés.

Montrons que $f(D_n)$ est de mesure nulle. Il suffit de montrer que $f(D_n \cap Q)$ est de mesure nulle pour tout cube $Q \subset U$, d'après la Proposition 2. Soit Q un cube de côté s. On partitionne Q en m^n petits cubes de côté $\frac{s}{m}$ de diamètre $\frac{s\sqrt{n}}{m}$ où $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_0 \in Q \cap D_n$ et soit Q' un des petits cubes contenant x_0. Comme les dérivées partielles de f d'ordre $n + 1$ sont bornées sur Q, on en déduit d'après la formule de Taylor, qu'il existe une constante c, indépendante de m, telle que

$$x \in Q' \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq c\,||x - x_0||^{n+1} \leq c\left(s\frac{\sqrt{n}}{m}\right)^{n+1}.$$

Ainsi $f(Q')$ est contenu dans un intervalle de longueur $\frac{a}{m^{n+1}}$ où a est une constante indépendante de m. Par conséquent, $f(D_n \cap Q)$ est contenu dans une réunion d'intervalles de longueur

$$L \leq a\frac{m^n}{m^{n+1}} = \frac{a}{m}.$$

Comme $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{a}{m} = 0$, $f(D_n \cap Q)$ est de mesure nulle.

Montrons que $f(D_i \setminus D_{i+1})$ est de mesure nulle pour $i < n$. Soit $x_0 \in D_i \setminus D_{i+1}$. Toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à i de f sont nulles en x_0, et il existe une dérivée partielle de f d'ordre $i+1$ qui ne s'annule pas en x_0. Soit g une dérivée partielle d'ordre i de f telle que sa dérivée en x_0 soit non nulle. Ainsi par continuité, on en déduit que la dérivée de g est non nulle dans un voisinage ouvert V de x_0. Comme $g = 0$ sur $D_i \setminus D_{i+1}$, on a $g(x_0) = 0$ et d'après ce qui précède, x_0 est un point régulier de g. On en déduit que 0 est une valeur régulière de g (i.e. 0 n'est pas une valeur critique de g). Posons

$$V^{n-1} = g^{-1}(0)$$

qui est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$. Comme $g(x_0) = 0$, on en déduit que la dérivée de $f|_{V^{n-1}}$ s'annule en x_0. Ainsi on a $x_0 \in crit(f|_{V^{n-1}})$ et

$$((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V) \subset crit(f|_{V^{n-1}}).$$

Par conséquent,

$$f((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V) = f|_{V^{n-1}}((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V) \subset f|_{V^{n-1}}(crit(f|_{V^{n-1}}))$$

et comme $f|_{V^{n-1}}(crit(f|_{V^{n-1}}))$ est de mesure nulle d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$f((D_i \setminus D_{i+1}) \cap V)$$

est de mesure nulle. Enfin, on applique la Proposition 2, et il vient que $f(D_i \setminus D_{i+1})$ est de mesure nulle.

<u>2$^{\text{ème}}$ partie</u> : Montrons que $f(C \setminus D)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^k$. Soit $x_0 \in C$, comme la dérivée de f ne s'annule pas en x_0, il existe une application dite de projection de la dernière coordonnée

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R} \\ & (t_1, \ldots, t_k) & \mapsto & t_k \end{array}$$

telle que la dérivée de $g \circ f$ ne s'annule pas en x_0. Ainsi, il existe un voisinage de U de x_0 où la dérivée de $g \circ f$ ne s'annule pas, i.e. où $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ n'a que des valeurs régulières. Pour $t \in R$,

$$V_t^{n-1} = (g \circ f)^{-1}(t)$$

est alors une sous-variété lisse de dimension $n-1$. Soit

$$f_t = f|_{V_t^{n-1}} : V_t^{n-1} \to g^{-1}(t) = \mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}.$$

On voit que si x_0 est un point critique pour f, alors x_0 est un point critique pour f_t. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de f_t est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}$ pour tout t. Ainsi

$$(f((C \setminus D) \cap U \cap Q)) \cap \left(\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}\right)$$

est de mesure nulle pour tout t et pour tout cube Q. D'après les Propositions 2 et 3, on en déduit que $f(C \setminus D)$ est de mesure nulle. ■

1.3 Théorème d'Hurewicz

Rappelons le théorème de Hurewicz que l'on peut trouver dans [1].

Théorème 5 (Théorème d'Hurewicz) *Soit X un espace topologique connexe par arcs, $x_0 \in X$,*

$$\widetilde{\pi_1}(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) / [\pi_1, \pi_1]$$

et soit Φ le morphisme défini par

$$\begin{array}{rlcl} \Phi : & (\pi_1(X, x_0), *) & \to & (H_1(X), +) \\ & [[f]] & \mapsto & [f]. \end{array}$$

Φ_* définie par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & H_1(X) \\ \downarrow pr & \nearrow^{\Phi_*} & \\ \widetilde{\pi_1}(X, x_0) & & \end{array}$$

est un isomorphisme.

Preuve. D'abord, on définit l'application qui sera l'inverse de Φ_*. Soit $f \in \Delta_1(X)$, posons

$$\widehat{f} = \lambda_{f(0)} * f * \lambda_{f(1)}^{-1}$$

où λ_x désigne un chemin allant de x_0 à x. Ainsi, $\widehat{f}$ est un lacet en x_0. Notons

$$\begin{array}{rlcl} \psi : & \Delta_1(X) & \to & \pi_1(X, x_0) \\ & f & \mapsto & \left[\left[\widehat{f}\right]\right] \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl}\psi(0) & = & \psi(f+g-f-g) \\ & = & \left[\left[\widehat{f}\right]\right] * [[\widehat{g}]] * \left[\left[\widehat{f}\right]\right]^{-1} * [[\widehat{g}]]^{-1}.\end{array}$$

Par conséquent, ψ s'étend à un morphisme

$$\Psi : \Delta_1(X) \to \widetilde{\pi}_1(X, x_0)$$

et l'on note $\widetilde{[[f]]}$ la classe de $[[f]]$ dans $\widetilde{\pi_1}(X, x_0)$.

Montrons que Ψ envoie $B_1(X)$ sur $1_{\widetilde{\pi_1}(X,x_0)}$. Soit

$$\sigma : \Delta_2 \to X$$

un 2-simplexe, posons $\sigma(e_i) = y_i$, $f = \sigma^{(2)}$, $g = \sigma^{(1)}$, $h = \sigma^{(0)}$. On a

$$\begin{array}{rcl}\Psi(\partial\sigma) & = & \Psi(\sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \\ & = & \Psi(g - h^{-1} + f) = \Psi(f + g - h^{-1}) \\ & = & \Psi(f) * \Psi(g) * \Psi(\widetilde{h^{-1})}^{-1} \\ & = & \widetilde{\left[\left[\widehat{f}\right]\right]} * \widetilde{[[\widehat{g}]]} * \left[\left[\widetilde{\left(\widehat{h^{-1}}\right)}^{-1}\right]\right] \\ & = & \left[\left[\widehat{f} * \widetilde{\widehat{g} * \left(\widehat{h^{-1}}\right)}^{-1}\right]\right] \\ & = & \left[\left[\lambda_{y_0} * f * \lambda_{y_1}^{-1} * \lambda_{y_1} \widetilde{* g * \lambda_{y_2}^{-1}} * \left(\lambda_{y_0} * h^{-1} * \lambda_{y_2}^{-1}\right)^{-1}\right]\right] \\ & = & \left[\left[\lambda_{y_0} * f * \lambda_{y_1}^{-1} * \lambda_{y_1} * g * \lambda_{y_2}^{-1} * \lambda_{y2} * h * \lambda_{y_0}^{-1}\right]\right] \\ & = & \left[\left[\lambda_{y_0} * f * g * h * \lambda_{y_0}^{-1}\right]\right] \\ & = & [[cons\tan te]] \\ & = & 1_{\widetilde{\pi_1}(X,x_0)} \text{ car } \ f * g * h \overset{homotope}{\approx} \text{ constante.}\end{array}$$

On sait que Ψ induit un morphisme

$$\Psi_* : H_1(X) \to \widetilde{\pi_1}(X, x_0).$$

Si f est un lacet et si λ_{x_0} est le chemin constant égal à x_0, alors

$$\Psi_* \circ \Phi_* \widetilde{[[f]]} = \Psi_* [f] = \left[\left[\lambda_{x_0} \widetilde{* f *} \lambda_{x_0}^{-1}\right]\right] = \widetilde{[[f]]}.$$

On a donc montré que $\Psi_* \circ \Phi_* = 1_{\widetilde{\pi_1}(X,x_0)}$.

Soit σ un 1-simplexe dans X, alors on a

$$\begin{array}{rcl}\Phi_* \circ \Psi(\sigma) & = & \Phi_* \left[\left[\lambda_{\sigma(0)} \widetilde{* \sigma *} \lambda_{\sigma(1)}^{-1}\right]\right] \\ & = & \left[\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \lambda_{\sigma(1)}^{-1}\right] \\ & = & \left[\lambda_{\sigma(0)} + \sigma + \lambda_{\sigma(1)}^{-1}\right]\end{array}$$

et ceci est possible car si f et g sont deux chemins tels que $f(1) = g(0)$. Alors $f * g - f - g = 0$ en homologie, ainsi

$$\Phi_* \circ \Psi(\sigma) = \left[\lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)}\right]$$

car si f est un chemin, alors $f^{-1} + f = 0$ en homologie. D'où, il vient

$$\Phi_* \circ \Psi(\sigma) = [\sigma - \lambda_{\partial\sigma}]$$

Ainsi, si c est un 1-cycle alors

$$\Phi_* \circ \Psi(c) = [c]$$

d'où $\Phi_* \circ \Psi_*(c) = [c]$, ce qui termine la preuve. ■

1.4 Le lemme des 5

Non allons maintenant énoncer et démontrer le lemme des 5 que l'on peut trouver par exemple dans [1].

Lemme 6 (Lemme des 5) *Soit $(A_i)_{1\leq i\leq 5}$ et $(B_i)_{1\leq i\leq 5}$ deux familles d'espaces topologiques, on considère le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

dont chaque carré commute, et dont les 2 suites horizontales sont exactes. Si f_1,, f_2, f_4, et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Preuve. On note

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \overset{g_1}{\hookrightarrow} & A_2 & \overset{g_2}{\longrightarrow} & A_3 & \overset{g_3}{\longrightarrow} & A_4 & \overset{g_4}{\twoheadrightarrow} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \overset{h_1}{\hookrightarrow} & B_2 & \overset{h_2}{\longrightarrow} & B_3 & \overset{h_3}{\longrightarrow} & B_4 & \overset{h_4}{\twoheadrightarrow} & B_5 \end{array}$$

Soit $a_3 \in \ker(f_3)$, alors $f_3(a_3) = 0$. Or on a que

$$f_4(g_3(a_3)) = h_3(f_3(a_3)) = h_3(0) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$g_3(a_3) = a_4 \in \ker(f_4) = \{0\}.$$

Ainsi, on a $g_3(a_3) = 0$, et donc

$$a_3 \in \ker(g_3).$$

La suite étant exacte, il vient $a_3 \in \mathrm{Im}(g_2)$. Il existe alors $a_2 \in A_2$ tel que $a_3 = g_2(a_2)$. On a

$$f_2(a_2) = b_2 \in B_2$$

de plus

$$h_2(f_2(a_2))) = h_2(b_2) = f_3(g_2(a_2)) = f_3(a_3) = 0$$

ainsi

$$b_2 \in \ker(h_2) = \mathrm{Im}(h_1).$$

Par conséquent, il existe $b_1 \in B_1$ tel que $b_2 = h_1(b_1)$. f_1 étant un isomorphisme, il existe $a_1 \in A_1$ tel que $b_1 = f_1(a_1)$. Les carrés étant commutatifs, on a que

$$b_2 = h_1(f_1(a_1)) = f_2(g_1(a_1)).$$

Ainsi

$$b_2 = f_2(g_1(a_1)) = f_2(a_2)$$

et comme f_2 est un isomorphisme, on a $g_1(a_1) = a_2$. Par suite, on a

$$a_2 \in \mathrm{Im}(g_1) = \ker(g_2).$$

Donc

$$g_2(a_2) = g_2(g_1(a_1)) = a_3 = 0$$

ce qui entraîne que f_3 est injective.

Soit $b_3 \in B_3$, on pose $h_3(b_3) = b_4$. On note alors

$$f_4^{-1}(h_3(b_3) = f_4^{-1}(b_4) = a_4 \in A_4,$$
$$h_4(b_4) = b_5 \in \mathrm{Im}(h_4) = \{0\}.$$

Ainsi, on en déduit que $b_5 = 0$, d'où

$$g_4(a_4) = a_5 = f_5^{-1}(h_4(b_4)) = f_5^{-1}(0) = 0$$

car f_5 est un isomorphisme. Donc, d'après l'exactitude de la suite supérieure, il existe $a_3 \in A_3$ tel que $g_3(a_3) = a_4$. On a

$$h_3(f_3(a_3) - b_3) = 0$$

car

$$h_3(f_3(a_3)) = f_4(g_3(a_3)) = f_4(a_4) = b_4 = h_3(b_3).$$

Ainsi d'après l'exactitude de la suite inférieure, il existe $b_2 \in B_2$ tel que

$$h_2(b_2) = f_3(a_3) - b_3.$$

On pose $f_2^{-1}(b_2) = a_2$, et $g_2(a_2) = a_3'$. On a

$$f_3(g_2(a_2)) = h_2(f_2(a_2))$$

d'où

$$f_3(a_3') = h_2(b_2) = f_3(a_3) - b_3.$$

Par conséquent

$$f_3(a_3 - a_3') = b_3$$

ce qui montre que f_3 est surjective. ■

1.5 Commutativité de π_n

Donnons un résultat sur la commutativité de π_n que l'on peut trouver dans [5].

Théorème 7 *Soit X un espace topologique, $x_0 \in X$; pour $n \geq 2$, le groupe $\pi_n(X, x_0)$ est commutatif.*

Preuve. Nous allons faire la preuve dans le cas $n = 2$, le cas général étant identique. Soit

$$\phi, \psi : (S^2, N) \to (X, x_0)$$

deux applications continues, où N est le pôle nord de la sphère. On définit le produit dans $\pi_2(X, x_0)$ par

$$[[\phi]] * [[\psi]] = [[\phi\psi]]$$

où

$$\phi\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \text{ est sur la calotte nord} \\ \psi(x) & \text{si } x \text{ est sur la calotte sud} \\ \phi(x) = \psi(x) = x_0 & \text{si } x \text{ est sur l'équateur} \end{cases}$$

S^n étant homéomorphe D^n/S^{n-1}, ϕ et ψ peuvent être représentées par

$$\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi} : (D^2, \widetilde{N}) \to (X, x_0)$$

où $\widetilde{N}$ est le pôle nord du disque. $\widetilde{\phi\psi}$ est définie par

$$\widetilde{\phi\psi}(x) = \begin{cases} \widetilde{\phi}(x) & si \quad x \text{ est dans le semi dique supérieur} \\ \widetilde{\psi}(x) & si \quad x \text{ est dans le semi disque inférieur} \\ \widetilde{\phi}(x) = \widetilde{\psi}(x) = x_0 & si \quad x \text{ est sur le bord de chaque semi disque} \end{cases}$$

On réalise une rotation du diamètre de l'équateur de D^2 autour du centre de D^2. Pour un angle $\alpha \in [0, \pi]$, on note

$$L_\alpha : D^2 \to D^2$$

l'application continue définie par la rotation d'angle α autour du centre. On note par $\widetilde{\phi\psi}_\alpha$ l'application continue définie par

$$\widetilde{\phi\psi}_\alpha(x) = \widetilde{\phi\psi} \circ L_\alpha(x).$$

On a $\widetilde{\phi\psi}_0 = \widetilde{\psi\phi}_\pi$, d'où $\phi\psi_0 = \psi\phi_\pi$. Par conséquent

$$[[\phi\psi]] = [[\phi\psi_0]] = [[\psi\phi_\pi]] = [[\psi\phi]]\,.$$

■

1.6 Théorème de Jordan pour les courbes

Définition 8 *Soit X et Y deux espaces topologiques,*

$$f : X \to Y$$

est un plongement si $f : X \to f(X)$ est un homéomorphisme.

Proposition 9 *Soit Y un espace topologique compact tel que pour tout plongement f , on ait*

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(Y)) = 0$$

alors pour $I = [0, 1]$, on a

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(I \times Y)) = 0.$$

Corollaire 10 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, si*

$$f : D^r \to S^n$$

est un plongement alors

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(D^r)) = 0$$

et en particulier $S^n \setminus f(D^r)$ est connexe.

Preuve. On montre le résultat par récurence. Le résultat est clair pour $r = 0$ d'après le résultat (2.2).

On suppose le résultat vrai à l'ordre $r - 1$. D'après la Proposition 9, on a

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(I \times D^{r-1})) = 0.$$

Or $D^r \simeq I \times D^{r-1}$, ainsi on a

$$\widetilde{H}_*(S^n \setminus f(I \times D^{r-1})) = \widetilde{H}_*(S^n \setminus f(D^r)) = 0.$$

Ceci montre en particulier que

$$H_0(S^n \setminus f(D^{r-1})) = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\#\{\text{composantes connexes de } S^n \setminus f(D^{r-1})\}}$$

et donc que $S^n \setminus f(D^{r-1})$ est connexe. ■

Théorème 11 *Si $f : S^r \to S^n$ est un plongement, alors*

$$\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(S^r)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n - r - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est à dire que $\widetilde{H}_i(S^n \setminus f(S^r)) \simeq \widetilde{H}_i(S^{n-r-1})$.

Preuve. On va montrer le résultat par récurrence sur r.

Pour $r=0$, on a

$$S^n \setminus f(0) \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx S^{n-1}$$

donc $S^n \setminus f(0)$ et S^{n-1} ont la même homologie.

On suppose le résultat vrai à l'ordre $r-1$, i.e.

$$\widetilde{H_i}(S^n \setminus f(S^{r-1})) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i = n-r \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors, pour un plongement f de S^r dans S^n, on pose

$$U_+ = S^n \setminus f(D^r_+)$$

et

$$U_- = S^n \setminus f(D^r_-).$$

On a

$$U_+ \cap U_- = S^n \setminus f(S^r)$$

et

$$U_+ \cup U_- = S^n \setminus f(S^{r-1}).$$

On applique le théorème de Mayer-Vietoris à U^+ et U^- et on a la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to \underbrace{\widetilde{H_{i+1}}(U_+) \oplus \widetilde{H_{i+1}}(U_-)}_{0} \to \widetilde{H_{i+1}}(S^n \setminus f(S^{r-1})) \to \widetilde{H_i}(S^n \setminus f(S^r))$$
$$\to \underbrace{\widetilde{H_i}(U_+) \oplus \widetilde{H_{i+1}}(U_-)}_{0} \cdots$$

Or, d'après le Corollaire 10, les termes en somme directe sont nuls, ce qui montre que les termes intermédiaires sont isomorphes, d'où le résultat. ∎

1.7 Lemme de Nakayama

Proposition 12 *Soit A un anneau unitaire commutatif. Si $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(A)$, alors*

$$d\acute{e}t(B) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \dots b_{\sigma(n),n}$$

Théorème 13 (Lemme de Nakayama) *Soit A un anneau local et $\underline{m}$ son idéal maximal, M un $A-$module finiment engendré et N un sous-module de M tel que*

$$M \subset N + \underline{m}M$$

alors $M = N$.

Preuve. Soit $M' = M/N$ et $m_1, \ldots, m_p$ des générateurs de M. On voit alors que

1. les classes d'équivalence $\dot{m}_1, \ldots, \dot{m}_p$ engendrent M'
2. $M = N + \underline{m}M \Rightarrow M' = \underline{m}M'$.

En particulier, d'après le point 2., on a

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = a_{11}\dot{m}_1 + \ldots + a_{1p}\dot{m}_p \\ \vdots \\ \dot{m}_p = a_{p1}\dot{m}_1 + \ldots + a_{pp}\dot{m}_p \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in \underline{m}$.

On écrit le système sous forme matricielle et il vient

$$(I - A) \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ et I est la matrice identité. On multiplie par la transposée de la matrice des cofacteurs et on obtient

$$d\acute{e}t(I - A) = \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 12, on a

$$d\acute{e}t(I - A) = 1 + a, \qquad a \in \underline{m}.$$

$1 + a$ est inversible dans A, car sinon $1 \in \underline{m}$ et on aurait $\underline{m} = A$!! D'où

$$(1 + a) \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\dot{m}_i = 0$ pour $1 \leq i \leq p$. Comme

$$M' = (\dot{m}_1, ..., \dot{m}_p)\, A$$

on conclut que $M' = \{0\}$, ce qui signifie que $M = N$. ■

1.8 Variétés de dimension 1

On s'intéresse ici aux variétés de dimension 1 dont voici l'un des principaux résultats que l'on peut trouver dans [2].

Théorème 14 *Une variété lisse connexe et dénombrable à l'infini de dimension* 1 *est difféomorphe à* S^1 *si elle est compact et à* $\mathbb{R}$ *si elle n'est pas compacte.*

La démonstration du résultat repose sur le fait qu'on sait qu'une telle variété admet un plongement dans $\mathbb{R}^3$. Donnons un résultat préliminaire.

Définition 15 *Soit* C *une sous-variété de dimension* 1 *d'un espace euclidien et*

$$\varphi :]a,b[\to C$$

une paramétrisation de C*, on dit que* φ *est une paramétrisation par longueur d'arc de* C *si pour tout* $t \in]a,b[$*,* $||\varphi'(t)|| = 1$.

Lemme 16 *Soit* C *une sous-variété de dimension* 1 *d'un espace euclidien,* J *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et*

$$\varphi : J \to C$$

une paramétrisation de C *alors*

(i) il existe une paramétrisation par longueur d'arc de C *de même image* $\varphi(J)$.

(ii) si $\varphi_1 : J_1 \to C$ *et* $\varphi_2 : J_2 \to C$ *sont deux paramétrisations par longueur d'arc de* C*, alors il existe* $c \in \mathbb{R}$*, tel que pour tout* $t \in J_2$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(c+t)$$

ou bien

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(c-t).$$

Preuve. *(i)* Soit $t_0 \in J$, on pose

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} ||\varphi'(u)||\, du.$$

La fonction S est lisse, et sa dérivée est partout non nulle. Si $I = S(J)$, la fonction

$$\varphi \circ S^{-1} : I \to C$$

donne une paramétrisation par longueur d'arc de C.

(ii) Soit maintenant $\varphi_1 : J_1 \to C$ et $\varphi_2 : J_2 \to C$ deux paramétrisations par longueur d'arc de C d'image $\varphi(J)$. La fonction

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : J_2 \to J_1$$

est un difféomorphisme. De plus, en dérivant la relation

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ \left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\right)$$

on voit que $\left|\left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\right)'(t)\right| = 1$. Donc la dérivée $\left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\right)'(t)$ est égale à 1 où -1. ■

Preuve. (du Théorème 14) Soit $\varphi :]a,b[\to C$ une paramétrisation par longueur d'arc. On peut la supposer maximale (éventuellement $a = -\infty$ où $b = +\infty$).

$\varphi\left(]a,b[\right)$ est ouvert car $\varphi :]a,b[\to C$ est un difféomorphisme local. Soit $x \in \overline{\varphi\left(]a,b[\right)} \setminus \varphi\left(]a,b[\right)$, on a

$$x = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n)$$

où $(t_n)_{n\geq 0}$ est une suite de points de $]a,b[$. Après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $(t_n)_{n\geq 0}$ converge. Sa limite est soit un point de $]a,b[$, soit a, soit b. Le premier cas est exclu, car on a supposé que $x \notin Im(\varphi)$. Supposons par exemple que la limite soit b. Soit

$$\psi :]-\epsilon, \epsilon[\to C$$

une paramétrisation par longueur d'arc de x dans C, telle que $\psi(0) = x$. Alors $\varphi(t_n) \in \psi(J)$ pour n assez grand. Plus précisément, on a $\varphi(t_n) = \psi(\eta_n)$, pour un unique η_n tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. D'après le Lemme 16, on a

$$\varphi(t) = \psi(\eta_n \pm (t - t_n)).$$

Pour n assez grand, $\psi(\eta_n \pm (t - t_n))$ fournit un prolongement de φ au delà de b, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité. Ceci montre que $\varphi\left(]a,b[\right)$ est fermé. Donc $\varphi\left(]a,b[\right)$ est fermé et ouvert dans C, ce qui montre par connexité que φ est surjective.

- Si φ est injective, on a une immersion bijective qui est un plongement, et donc φ réalise un difféomorphisme entre $]a,b[$ et C. Ceci prouve que C est difféomorphe à $\mathbb{R}$.
- Si φ n'est pas injective, prenons $t_1, t_2 \in]a,b[$ tels que

  $$\varphi(t_1) = \varphi(t_2).$$

  On peut supposer que $t_1 = 0$ et $t_2 = c > 0$. Les vecteurs $\varphi'(0)$ et $\varphi'(c)$ sont de norme 1 et tangents à C en un même point, donc

  $$\varphi'(0) = \pm\varphi'(c).$$

  Le cas $\varphi'(0) = -\varphi'(c)$ est exclu car le Lemme 16 appliqué aux paramétrisations $\varphi(t)$ et $\varphi(c-t)$ sur $[0,c]$, donnerait

  $$\varphi(t) = \varphi(c-t)$$

  soit en dérivant $\varphi'(t) = -\varphi'(c-t)$, puis $\varphi'(\frac{c}{2}) = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, $\varphi'(0) = \varphi'(c)$, et le Lemme 16 donne

  $$\varphi(t) = \varphi(c+t), \qquad c + t \in]a,b[\,.$$

Mais, si $]a,b[\ \neq \mathbb{R}$, cette relation donne aussi un prolongement de φ au delà de $]a,b[$, donc $]a,b[\ = \mathbb{R}$ et φ est périodique. Soit T sa plus petite période, si $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, d'après le raisonnement précédent

$$\varphi(t) = \varphi(t_2 - t_1 + t) \qquad \forall t, \forall\,(t_2 - t_1) \in T\mathbb{Z}.$$

Ainsi, par passage au quotient $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, φ donne une immersion injective de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ sur C, donc un plongement.

■

1.9 Le lemme de Morse

On énonce le lemme de Morse dont la preuve se trouve dans [3].

Théorème 17 (Lemme de Morse) *Soit $p_0 \in M$ un point critique non dégénéré d'une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$. Alors il existe une carte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ où U est un voisinage de p_0 tel que $\phi(p_0) = 0$ et pour tout $x \in U$*

$$\left(f \circ \phi^{-1}\right)(x) = f(p_0) - {x_1}^2 - \ldots - {x_k}^2 + {x_{k+1}}^2 + \ldots + {x_n}^2$$

k s'appelle l'indice de f en p_0 et il ne dépend pas du choix de la carte.

1.10 Familles de courbes réelles

Notation 18 *Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de courbes réelles C^∞ telle que*

$$X = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t \subseteq \mathbb{R}^n$$

soit une surface algébrique C^∞ non compacte. On pose

$$f : X \to \mathbb{R}$$

la restriction d'une fonction polynomiale

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Définition 19 *On dit que $s \in f(X)$ est typique si l'application f est une C^∞ fibration triviale en s (i.e. de fibre $f^{-1}(s)$) ; sinon s est dite atypique.*

L'ensemble des valeurs atypiques de f est noté Λ_f.

Définition 20 *Soit $a \leq b$ deux réels tels que $]a,b[\ \subset f(X) \setminus \Lambda_f$, $\mathcal{Y}$ une composante connexe de $f^{-1}(]a,b[)$, $Y_t = X_t \cap \mathcal{Y}$, on dit que $p \in X$ est limite quand t tend vers a de la famille $\{Y_t\}_{t\in]a,b[}$ s'il existe une famille $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{Y}$ telle que $p_k \underset{k\to\infty}{\to} p$ et $f(p_k) \underset{k\to\infty}{\to} a$.*

On note alors

$$\lim_{t\to a,\ t>a} Y_t = \Big\{ p \in X \mid p \text{ est limite quand } t \text{ tend vers } a \text{ de la famille } \{Y_t\}_{t\in]a,b[} \Big\}$$

On définit de manière analogue, $\lim_{t\to b, t<b} Y_t$.

Remarque 21 *On voit que* $\lim_{t\to a, t>a} Y_t \subseteq f^{-1}(a)$ *et que* $\lim_{t\to b, t<b} Y_t \subseteq f^{-1}(b)$. Y_t *est connexe pour tout* $t \in]a,b[$.

Définition 22 *Soit* $s \in]a,b[$ *et* Y_s *une composante connexe de* $f^{-1}(s)$, *on dit que la famille* $\{Y_t\}_{t\in]a,b[}$ *disparaît à l'infini quand* t *tend vers* a, $t > a$ *si*

$$\lim_{t\to a,\ t>a} Y_t = \emptyset.$$

On définit de manière analogue, la notion de disparaître à l'infini quand t *tend vers* b, $t < b$.

Lemme 23 *Soit* $a \in f(X)$ *une valeur régulière de* f, *alors avec les notations précédentes on a*

(i) $\lim_{t\to a,\ t>a} Y_t = \begin{cases} \emptyset \\ \text{réunion de certaines composantes connexes de } f^{-1}(a) \end{cases}$

(ii) si $\{Y'_t\}_{t\in]a,b[}$ *est une famille de courbes de certaines composantes connexes de* $\mathcal{Y}'$ *et si*

$$\left(\lim_{t\to a, t>a} Y_t\right) \cap \left(\lim_{t\to a, t>a} Y'_t\right) \neq \emptyset$$

alors $\{Y_t\}_{t\in]a,b[} = \{Y'_t\}_{t\in]a,b[}$.

Preuve. *(i)* Comme a est une valeur régulière, on peut montrer que $\lim_{t\to a, t>a} Y_t$ est un ouvert en utilisant des coordonnées locales de $f^{-1}(a)$. Mais cette limite est aussi un fermé, ce qui montre le résulat.

(ii) Evident ■

Définition 24 *On dit que la famille* $\{Y_t\}_{t\in]a,b[}$ *se partage quand* t *tend vers* a, $t > a$ *si* $\lim_{t\to a,\ t>a} Y_t$ *contient au moins deux composantes connexes non vides de* $f^{-1}(a)$.

Notation 25 *On note les conditions*

(B) *: le nombre de Betti de la fibre* X_t *est constant pour* t *dans un voisinage de* 0.

(E) *: La caractéristique d'Euler* $\chi(X_t)$ *est constante pour* t *dans un voisinage de* 0.

(nV) *: Il n'existe pas de composantes connexes de* X_t *qui disparaissent à l'infini quand* t *tend vers* 0, $t > 0$ *ou* $t < 0$.

(nS) *: Il n'existe pas de composantes connexes de* X_t *qui se partagent à l'infini quand* t *tend vers* 0, $t > 0$ *ou* $t < 0$.

Donnons le principal résultat dont la preuve se trouve dans [4].

Théorème 26 *Supposons que* $0 \in f(X)$ *soit une valeur régulière de* f, *alors on a les équivalences suivantes :*
(i) 0 *est une valeur typique de* f
(ii) ***(B)*** *et* ***(nV)***
(iii) ***(E)*** *et* ***(nV)***
(iv) ***(B)*** *et* ***(nS)***

Chapitre 2

Exercices

2.1 Homologie

Exercice 1 *Soit* $\mathbb{P}^n(R) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ *où*

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*;\ y = \lambda x$$

et

$$U_i = \{[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(R) : x_i \neq 0\}.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}^n(R) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

Solution 1 ($\subset$) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *on a* $U_i \subset \mathbb{P}^n(R)$. *Ainsi on a que* $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \subset \mathbb{P}^n(R)$.

($\supset$) *Soit* $[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(R)$, *posons*

$$\begin{array}{rl} \Pi : & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(R) \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \end{array}$$

$(x_1, ..., x_{n+1}) \neq 0$. *Il existe* $i \in \{1, ..., n+1\}$ *tel que* $x_i \neq 0$. *Ainsi*

$$\Pi(x_1, ..., x_{n+1}) \in U_i$$

ce qui montre que

$$[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

Donc on a que

$$\mathbb{P}^n(R) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

Exercice 2 *Soit* $U_i = \{[x] = [x_1 : \ldots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(R) : x_i \neq 0\}$ *et*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & [x] & \mapsto & (\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}) \end{array}$$

Monter que φ_i *est bijective.*

Solution 2 *Soit* $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *alors*

$$\varphi_i(y_1y_i, \ldots, y_{i-1}y_i, y_i, y_i^2, y_{i+1}y_i, \ldots, y_ny_i) = (y_1, \ldots, y_n)$$

si $(y_1y_i, ..., y_{i-1}y_i, y_i, y_i^2, y_{i+1}y_i, ..., y_ny_i) \in U_i$, *c'est-à-dire si* $y_i \neq 0$. *Ainsi* φ_i *est surjective.*

Soit $[x]$ *et* $[y]$ *dans* U_i *tels que*

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_i} = \frac{y_1}{y_i} \\ \vdots \\ \frac{x_{i-1}}{x_i} = \frac{y_{i-1}}{y_i} \\ \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{y_{i+1}}{y_i} \\ \vdots \\ \frac{x_{n+1}}{x_i} = \frac{y_{n+1}}{y_i} \end{cases}$$

Si $\lambda = \frac{x_i}{x_i}$ *alors il vient* $[x] = [\lambda y]$. *Or on a* $[y] = [\lambda y]$, *ainsi* $[x] = [y]$ *et* φ_i *est injective.*

Exercice 3 *Calculer* $H_*(\mathbb{CP}^n)$.

Solution 3 *D'après l'Exercice 1, on a*

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \coprod \mathbb{C}^{n-1} \coprod \cdots \coprod \mathbb{C}^1 \coprod \mathbb{C}^0$$

où $\mathbb{C}^i = \mathbb{R}^{2i} \overset{homeo}{\simeq} D^{2i}$. *On sait que la suite en homologie*

$$\ldots \overset{\delta_{n+2}}{\to} P_{n+1}(\mathbb{CP}^n) \overset{\delta_{n+1}}{\to} P_n(\mathbb{CP}^n) \overset{\delta_n}{\to} \ldots \overset{\delta_1}{\to} P_0(\mathbb{CP}^n) \overset{\delta_0}{\to} 0$$

nous donne

$$H_*(\mathbb{CP}^n) = \ker \delta_* / \operatorname{Im} \delta_*.$$

Or

$$\begin{array}{rcl} P_i(\mathbb{CP}^n) & = & \mathbb{Z}^{\#\{cellules\ de\ dimensionsi\ de\ \mathbb{CP}^n\}} \\ & = & \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i\ est\ pair\ et\ 0 \leq i \leq 2n \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

ainsi la suite en homologie devient

$$\cdots 0 \overset{\delta_{2n+2}}{\to} 0 \overset{\delta_{2n+1}}{\to} \mathbb{Z} \overset{\delta_{2n}}{\to} 0 \overset{\delta_{2n-1}}{\to} \mathbb{Z} \overset{\delta_{2n-2}}{\to} \cdots \mathbb{Z} \overset{\delta_0}{\to} 0$$

d'où

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\ \delta_{2k} = 0 & \textit{pour } 0 \le k \le n \\ \ker \delta_{2k} = \mathbb{Z} & \textit{pour } 0 \le k \le n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\, \delta_{2k-1} = \delta_{2k-1}(0) & \textit{pour } 1 \le k \le n \\ \ker \delta_{2k-1} = 0 & \textit{pour } 1 \le k \le n \end{cases}$$

Donc, il vient

$$\begin{array}{rcll} H_i\left(\mathbb{CP}^n\right) & = & \mathbb{Z} & \textit{pour } i \textit{ pair et } 0 \le i \le 2n \\ & = & 0 & \textit{sinon} \end{array}$$

Exercice 4 *Soit $A \subset X$ deux espaces topologiques et $i : A \hookrightarrow X$ une A rétracte de X.*

(i) Montrer que la suite exacte longue de la paire (A, X) se décompose en suite exactes courtes

$$0 \to H_k(A) \overset{(i_k)_*}{\to} H_k(X) \overset{(j_k)_*}{\to} H_k(X, A) \to 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$

(ii) En déduire que $H_k(X) \simeq H_k(A) \oplus H_k(X, A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Solution 4 *(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la suite exacte longue de la paire suivante*

$$\cdots \to H_{k-1}(X, A) \overset{(\delta_{k-1})_*}{\to} H_k(A) \overset{(i_k)_*}{\to} H_k(X) \overset{(j_k)_*}{\to} H_k(X, A) \overset{(\delta_k)_*}{\to} H_{k-1}(A) \to \cdots$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(i_k)_* = \ker(j_k)_*$.

Il existe $r : X \to A$ tel que $r \circ i = id_A$, ainsi

$$((r \circ i)_k)_* = (r_k)_* \circ (i_k)_* = id_{H_k(A)}$$

d'où $(i_k)_*$ est injective.

On a

$$(j_k)_\Delta : \Delta_k(X) \to \Delta_k(X, A) = \Delta_k(X)/\Delta_k(A)$$

qui est surjective et comme

$$\begin{array}{rccl} (j_k)_* : & H_k(X) & \to & H_k(X, A) \\ & [c] & \mapsto & [(j_k)_\Delta(c)] \end{array}$$

on en déduit que $(j_k)_*$ est surjective.

(ii) D'après (i), on en déduit que

$$H_k(X)/\ker(j_k)_* \simeq \mathrm{Im}(j_k)_*.$$

Or, on sait que $\mathrm{Im}(j_k)_* = H_k(X, A)$ *et que* $\ker(j_k)_* = \mathrm{Im}(i_k)_*$. *De plus, on a que* $\mathrm{Im}(i_k)_* \simeq H_k(A)$. *Par conséquent,*

$$H_k(X)/H_k(A) \simeq H_k(X, A)$$

ce qui montre que

$$H_k(X) \simeq H_k(A) \oplus H_k(X, A).$$

Exercice 5 *Soit* (X, Y, Z) *un triplet topologique (i.e.,* $Y \subset X$ *et* $Z \subset Y$*) et* $\left(\Delta_*(X), \partial_*^X\right)$, $\left(\Delta_*(Y), \partial_*^Y\right)$ *et* $\left(\Delta_*(Z), \partial_*^Z\right)$ *les complexes de chaînes respectifs.*

(i) Montrer que la suite

$$0 \to \Delta_k(Y, Z) \overset{(i_{\Delta'})_k}{\to} \Delta_k(X, Z) \overset{(j_{\Delta'})_k}{\to} \Delta_k(X, Y) \to 0$$

est exacte pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(ii) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ *la suite exacte longue d'homologie du triplet :*

$$\cdots \to H_k(Y, Z) \overset{(i_k)_*}{\to} H_k(X, Z) \overset{(i_k)_*}{\to} H_k(X, Y) \overset{(\partial_k)_*}{\to} H_{k-1}(Y, Z) \overset{(\delta_k)_*}{\to} \cdots$$

Solution 5 *(i) Soit* $i : Y \hookrightarrow X$ *l'inclusion, on note* $c + \Delta_k(Z)$ *un élément de* $\Delta_k(Y, Z) = \Delta_k(Y)/\Delta_k(Z)$. *On pose*

$$\begin{array}{rl} (i_\Delta)_k : & \Delta_k(Y) \hookrightarrow \Delta_k(X) \\ & c \mapsto c \end{array}$$

l'inclusion. On a alors

$$\begin{array}{rl} (i_{\Delta'})_k : & \Delta_k(Y, Z) \hookrightarrow \Delta_k(X, Z) \\ & c + \Delta_k(Z) \mapsto c + \Delta_k(Z) \end{array}$$

l'inclusion qui est injective.

On pose

$$\begin{array}{rlcl} (j_{\Delta'})_k : & \Delta_k(X, Z) & \to & \Delta_k(X, Y) \\ & c + \Delta_k(Z) & \mapsto & c + \Delta_k(Y) \end{array}$$

qui existe car $Z \subset Y \subset X$ *et est surjective.*

($\subset$) *Soit* $c + \Delta_k(Z) \in \Delta_k(Y, Z)$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} (j_{\Delta'})_k \circ (i_{\Delta'})_k(c + \Delta_k(Z)) & = & (j_{\Delta'})_k(c + \Delta_k(Z)) \\ & = & c + \Delta_k(Y) \\ & = & \Delta_k(Y) \text{ car } c \in \Delta_k(Y). \end{array}$$

($\supset$) *Soit* $c + \Delta_k(Z) \in \ker(j_{\tilde{\Delta}})_k$, *c'est à dire que* $c \in \Delta_k(Y)$ *alors*

$$c + \Delta_k(Z) = (i_{\Delta'})_k(c + \Delta_k(Z))$$

via l'inclusion $(i_{\Delta'})_k$, *ce qui montre que*

$$\ker(j_{\Delta'})_k \subset \mathrm{Im}(i_{\Delta'})_k.$$

(ii) Ce résultat vient du théorème suivant [1, Theorem 5.6].

Exercice 6 *Montrer que* S^{n-1} *n'est pas une rétracte de* D^n.

Solution 6 *Supposons que* $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ *soit une* S^{n-1} *rétracte de* D^n, *alors il existe*

$$r : D^n \to S^{n-1}$$

tel que $r \circ i = id_{S^{n-1}}$. *On a alors*

$$\big((r \circ i)_{k-1}\big)_* = (r_{k-1})_* \circ (i_{k-1})_* = id_{\widetilde{H_{k-1}}(S^{k-1})} \tag{2.1}$$

où

$$\widetilde{H_{k-1}}(S^{k-1}) \overset{(i_{k-1})_*}{\rightarrow} \widetilde{H_{k-1}}(D^k) \overset{(r_{k-1})_*}{\rightarrow} \widetilde{H_{k-1}}(S^{k-1}).$$

Or on sait que

$$\widetilde{H_i}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i = n \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{2.2}$$

Ainsi, les égalités (2.1) donnent la suite

$$\mathbb{Z} \overset{(i_{k-1})_*}{\rightarrow} 0 \overset{(r_{k-1})_*}{\rightarrow} \mathbb{Z}.$$

Soit $z \in \mathbb{Z}$, *d'après (2.1) on a*

$$(r_{k-1})_* \circ (i_{k-1})_* (z) = (r_{k-1})_*(0) = z. \tag{2.3}$$

Soit $z' \in \mathbb{Z}\setminus \{z\}$, *alors*

$$(r_{k-1})_* \circ (i_{k-1})_* (z') = (r_{k-1})_*(0) = z$$

d'après (2.3), ce qui contredit (2.1) !

Exercice 7 *(Théorème de Brouwer) Montrer que toute application continue*

$$f : D^n \to D^n$$

possède un point fixe.

Solution 7 *Supposons que* $f : D^n \to D^n$ *continue, ne possède pas de point fixe. On construit alors*

$$\begin{array}{rccl} r : & D^n & \to & S^{n-1} \\ & x & \mapsto & [f(x), x) \cap S^{n-1} \end{array}$$

où $[f(x), x)$ *désigne la demi-droite d'origine* $f(x)$ *passant par* x. r *est continue et elle définit une* S^{n-1} *rétracte de* D^n, *ce qui contredit l'Exercice 6.*

Exercice 8 *Monter que*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Solution 8 *Posons*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i = n \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{S_n}$$

$$H_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i = n \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{D_n}$$

$$H_i(S^n, D_+^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ i = n \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{R_n}$$

Montrons ces 3 assertions par une récurrence "en cascade" sur n.
D'abord, on a

$$H_i(S^0, D_+^0) \simeq H_i(\{point\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}\ si\ i = 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

Montrons que $(R_n) \Leftrightarrow (S_n)$. Ceci vient de la suite exacte en homologie de la paire $\left(S^n, D_+^n\right)$ et du fait que D_+^n soit contractible :

$$0 = \widetilde{H_i}(D_+^n) \to \widetilde{H_i}(S^n) \to H_i(S^n, D_+^n) \to \widetilde{H_{i-1}}(D_+^n) = 0$$

Montrons que $(R_n) \Leftrightarrow (D_n)$. Soit U un "petit" voisinage du pôle nord de S^n, d'après l'axiome d'excision, on a

$$\widetilde{H_i}(S^n, D_+^n) \simeq \widetilde{H_i}(S^n \setminus U, D_+^n \setminus U).$$

Or $(S^n \setminus U, D_+^n \setminus U) \approx (D_-^n, S^{n-1})$, on sait que

$$\widetilde{H_i}(S^n \setminus U, D_+^n \setminus U) \simeq \widetilde{H_i}(D_-^n, S^{n-1})$$

ce qui montre le résultat.

Montrons que $(D_n) \Leftrightarrow (S_{n-1})$. Ceci vient de la suite exacte en homologie de la paire $\left(D^n, S^{n-1}\right)$ et du fait que D^n soit contractible :

$$0 = \widetilde{H_i}(D^n) \to H_i(D^n, S^{n-1}) \to \widetilde{H_{i-1}}(S^{n-1}) \to \widetilde{H_{i-1}}(D^n) = 0$$

Finalement,on a

$$(D_0) \Leftrightarrow (R_0) \Leftrightarrow (S_0) \Rightarrow (D_1) \Rightarrow (R_1) \Rightarrow (S_1) \Rightarrow (D_2) \Rightarrow \cdots$$

Exercice 9 *Si $f : S^n \to S^n$ est continue, on définit le degré de f comme l'entier* $\deg(f)$ *vérifiant*

$$(f_n)_*(x) = (\deg(f))\, x, \qquad \forall x \in \widetilde{H_n}(S^n) \simeq \mathbb{Z}$$

On remarque immédiatement que

$$deg(f \circ g) = deg(f)\ deg(g) \tag{2.4}$$

et on suppose connu le fait que le degré de

$$\begin{array}{rlcl} f: & S^n & \to & S^n \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (-x_0, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

est -1. *Montrer que le dégré de l'application antipodale*

$$\begin{array}{rlcl} g: & S^n & \to & S^n \\ & x & \mapsto & -x \end{array}$$

est $(-1)^{n+1}$.

Solution 9 *L' application f n'est pas topologiquement différente des applications inversant une autre coordonnée. Ainsi toutes ces application sont de dégré -1. Comme g est la composée de ces $n+1$ applications, on a d'après la remarque (2.4) que*

$$deg(g) = (-1)^{n+1}.$$

Exercice 10 *Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. $i : A \hookrightarrow X$ est une rétracte de déformation s'il existe*

$$\phi_t : X \to X, \qquad t \in [0, 1]$$

où

$$\begin{cases} \phi_0 = id_X \\ \phi_1(X) \subset A \\ \phi_1|_A = id_A \end{cases}$$

On a alors $\phi_1 \circ i = id_A$.

(i) Montrer que ϕ_1 est une homotopie d'équivalence.

(ii) Déduire que $H_k(X) \simeq H_k(A)$

(iii) En déduire $H_k(X, A)$.

Solution 10 *(i) Posons*

$$\begin{array}{rlcl} F: & X \times [0,1] & \to & X \\ & (x, t) & \to & \phi_t(x) \end{array}$$

alors $F(x, 0) = id_X$ et $F(x, 1) = i \circ \phi_1(x)$. Ainsi, F est une homotopie. Donc on a

$$i \circ \phi_1 \approx id_X$$

Et comme $\phi_1 \circ i = id_A$, on en déduit que ϕ_1 est une homotopie d'équivalence.

(ii) L'homotopie étant un invariant homologique, on a

$$H_k(X) \simeq H_k(A), \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

(iii) Par théorème, on a la suite exacte longue suivante

$$\cdots \to H_{k-1}(X, A) \to H_k(A) \xrightarrow{\simeq} H_k(X) \to H_k(X, A) \to \cdots$$

ce qui montre que

$$H_k(X, A) = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

2.2 Singularités

Exercice 11 *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, calculer le nombre de Milnor $\mu(f)$ pour le germe en 0 de*

$$\begin{array}{rlll} f: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \mapsto & x^n + y^m \end{array}$$

Puis généraliser.

Solution 11 *On pose $I = (x^{n-1}, y^{n-1})\mathcal{O}$. On a*

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & \sum_{\substack{i\geq 0 \\ j\geq 0}} a_{i,j}x^i y^j \\ & = & \underbrace{\sum_{j\geq 0} a_{0,j}y^j + x\sum_{j\geq 0} a_{1,j}y^j + \cdots + x^{n-2}\sum_{j\geq 0} a_{n-2,j}y^j}_{n-1 termes} + \underbrace{x^{n-1}\sum_{\substack{i\geq 0 \\ j\geq 0}} a_{i+n-1,j}x^i y^j}_{\in I} \end{array}$$

Considérons un des $n-1$ termes $x^k \sum_{j\geq 0} a_{k,j}y^j$. Il vient

$$x^k \sum_{j\geq 0} a_{k,j}y^j = x^k \left[\underbrace{a_{k,0} + a_{k,1}y + \cdots + a_{k,m-1}y^{m-2}}_{m-1 \ termes} + \underbrace{y^{m-1}\left(\sum_{j\geq 0} a_{k,j+m-1}y^j\right)}_{\in I} \right]$$

On voit ainsi que l'on obtient une base de $\mathcal{O}/I$ formée de $(n-1)(m-1)$ termes ; donc

$$\mu(f) = (n-1)(m-1).$$

On montre de la même manière que pour

$$\begin{array}{rlll} g: & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_1^{k_1} + \cdots + x_n^{k_n} \end{array}$$

$\mu(g) = (k_1 - 1) \cdots (k_n - 1)$.

Bibliographie

[1] E. Bredon. *Topology and Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Spinger-Verlag, 1993.

[2] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Presse Universitaires de Grenoble, EDP Sciences, 1996.

[3] J. Milnor. *Morse Theory*, volume 51. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1963.

[4] M. Tibar and A. Zaharia. Asymptotic behavior of families of real curves. *Manuscripta Math.*, 99(3) :383–393, 1999.

[5] V.A. Vassiliev. *Introduction to topology*, volume 14. Student Mathematical Library, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.